

# Preparazione all'Esame di Stato di Ingegneria Elettronica

Tema di Elettronica Digitale  
Vecchio Ordinamento\*  
I sessione 2005

Tarin Gamberini<sup>†</sup>

## Sommario

In questo breve articolo sono ricavate, in una forma più generale, alcune formule tipicamente impiegate all'esame di Elettronica II.

Per la preparazione al tema di Elettronica Digitale dell'Esame di Stato ci siamo confrontati, a volte, con esercizi più complessi dal punto di vista dei calcoli rispetto a quelli svolti durante il corso di laurea. In tali esercizi non erano verificate delle *particolari ipotesi* sotto le quali utilizzare le usuali espressioni di Elettronica II: era necessario ricalcolarle sotto ipotesi meno restrittive.

Osserviamo inoltre che un esame universitario dura in media dalle due alle tre ore, nelle quali il professore preferisce di solito proporre esercizi più complicati dal punto di vista concettuale che non da quello dei calcoli. Invece l'Esame di Stato ha una durata legale di otto ore durante le quali è possibile svolgere un tema complesso sia nell'approccio concettuale che nel calcolo delle risposte ai quesiti.

---

\*L'Esame di Stato per l'abilitazione all'esercizio della professione di Ingegnere è stato riformato dal d.p.r. 5 giugno 2001, n.328, che modifica i requisiti per l'accesso e lo svolgimento delle prove, ma fino alla II sessione dell'anno 2006 continuerà a svolgersi anche con la vecchia modalità per i laureati dei *vecchi ordinamenti* previgenti al dm 509/1999.

<sup>†</sup>taringamberini [at] taringamberini [dot] com - [www.taringamberini.com](http://www.taringamberini.com).

## Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Tempo di salita del transfert gate cMOS</b>                                  | <b>3</b>  |
| 1.1      | Determinazione delle regioni di funzionamento . . . . .                         | 3         |
| 1.2      | Calcolo di $\Delta t_1$ integrando fra 0 e $ V_{TP} $ . . . . .                 | 4         |
| 1.3      | Calcolo di $\Delta t_2$ integrando fra $ V_{TP} $ e $V_{DD} - V_{TN}$ . . . . . | 6         |
| 1.4      | Calcolo di $\Delta t_3$ integrando fra $V_{DD} - V_{TN}$ e $V_{DD}$ . . . . .   | 9         |
| <b>2</b> | <b>Transfert gate nMOS con effetto body</b>                                     | <b>10</b> |

## Elenco delle figure

|   |                                      |    |
|---|--------------------------------------|----|
| 1 | Transfert Gate cMOS . . . . .        | 3  |
| 2 | Intervalli di integrazione . . . . . | 4  |
| 3 | Transfert gate nMOS . . . . .        | 11 |

## Introduzione

In questo breve articolo sono ricavate, in una forma più generale, alcune formule tipicamente impiegate all’esame di Elettronica II.

Normalmente si utilizzano espressioni “standard” che verificano le seguenti *particolari ipotesi*:

- $V_{OH} = V_{DD}$
- $V_{OL} = 0V$
- $V_{OH_{min}} = 90\%V_{DD} = 0.9V_{DD}$
- $V_{OL_{max}} = 10\%V_{DD} = 0.1V_{DD}$

In alcuni esercizi tali ipotesi non sono verificate e quindi è possibile applicare le espressioni “standard” solo a patto di introdurre inevitabili errori di approssimazione. Invece per ottenere espressioni analiticamente corrette occorre ricalcolarle sotto ipotesi meno restrittive.

## 1 Tempo di salita del transfert gate cMOS

Riportiamo in fig. 1 lo schema del transfert gate.

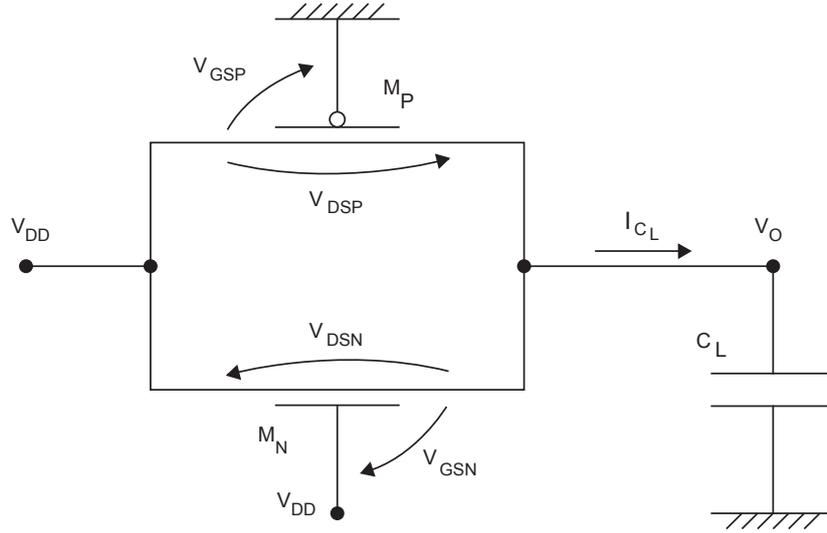


Figura 1: Transfert Gate CMOS

### 1.1 Determinazione delle regioni di funzionamento

$M_N$  è acceso per la maggior parte del transitorio, e si spegne solo verso la fine della carica di  $C_L$ :

$$\begin{aligned}
 M_N \text{ ON} &\Leftrightarrow V_{GSN} \geq V_{TN} \\
 &V_{DD} - V_O \geq V_{TN} \\
 &V_O \leq V_{DD} - V_{TN} \\
 M_N \text{ OFF} &\Leftrightarrow V_O > V_{DD} - V_{TN}
 \end{aligned}$$

$M_N$  lavora sempre in regione di saturazione:

$$\begin{aligned}
 M_N \text{ SAT} &\Leftrightarrow V_{DSN} \leq V_{GSN} - V_{TN} \\
 &V_{DD} - V_O \leq V_{DD} - V_O - V_{TN} \\
 &0 \leq -V_{TN}
 \end{aligned}$$

$M_P$  è sempre acceso:

$$\begin{aligned}
 M_P \text{ ON} &\Leftrightarrow V_{GSP} \leq V_{TP} \\
 &0 - V_{DD} \leq -|V_{TP}|
 \end{aligned}$$

e lavora in regione:

$$\begin{aligned}
 M_P \text{ TRI} &\Leftrightarrow V_{DSP} \geq V_{GSP} - V_{TP} \\
 &V_O - V_{DD} \geq 0 - V_{DD} + |V_{TP}| \\
 &V_O \geq |V_{TP}| \\
 M_P \text{ SAT} &\Leftrightarrow V_O < |V_{TP}|
 \end{aligned}$$

Pertanto durante la carica di  $C_L$  i MOS del transfert gate attraversano le regioni di funzionamento, riportate in fig. 2. Sono così individuati tre intervalli di tempo in cui occorrerà integrare le opportune espressioni delle correnti. Il

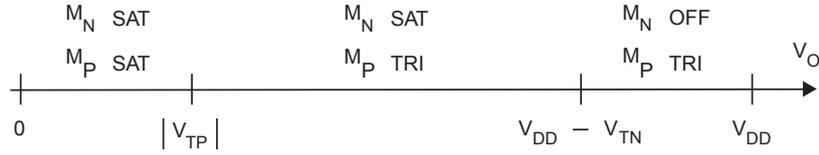


Figura 2: Intervalli di integrazione

tempo di carica del condensatore  $C_L$  sarà dato da:

$$\tau_R = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$$

## 1.2 Calcolo di $\Delta t_1$ integrando fra 0 e $|V_{TP}|$

La corrente di carica è data dalla somma della corrente fornita sia da  $M_N$  che da  $M_P$ , entrambi operanti in regione di saturazione. Per calcolare  $\Delta t_1$  occorre risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} I_{C_L} = C_L \frac{dV_O}{dt} \\ I_{C_L} = I_{M_N \text{ SAT}} + I_{M_P \text{ SAT}} \end{cases}$$

che è equivalente all'equazione differenziale:

$$\begin{aligned}
 C_L \frac{dV_O}{dt} &= I_{M_N \text{ SAT}} + I_{M_P \text{ SAT}} \\
 &= \frac{\beta_n}{2} [V_{DD} - V_O - V_{TN}]^2 + \frac{\beta_p}{2} [0 - V_{DD} - V_{TP}]^2
 \end{aligned}$$

Separando le variabili:

$$\frac{C_L}{\frac{\beta_n}{2} [V_{DD} - V_O - V_{TN}]^2 + \frac{\beta_p}{2} [0 - V_{DD} + |V_{TP}|]^2} dV_O = dt$$

$$\frac{C_L}{\frac{\beta_n}{2} \left\{ \frac{\beta_p}{\beta_n} [-V_{DD} + |V_{TP}|]^2 + [V_{DD} - V_O - V_{TN}]^2 \right\}} dV_O = dt$$

in cui integriamo partendo da un generico  $V_{OLmax}$  a cui corrisponde l'istante iniziale  $t_i = t_0$ :

$$\int_{V_{OLmax}}^{|V_{TP}|} \frac{\frac{2C_L}{\beta_n}}{\frac{\beta_p}{\beta_n} [-V_{DD} + |V_{TP}|]^2 + [V_{DD} - V_O - V_{TN}]^2} dV_O = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_1} dt$$

Effettuiamo un cambiamento di variabile ponendo:

$$V_{DD} - V_O - V_{TN} = x$$

$$V_{DD} - x - V_{TN} = V_O$$

da cui:

$$dV_O = -dx$$

Inoltre posto:

$$\frac{\beta_p}{\beta_n} [-V_{DD} + |V_{TP}|]^2 = a^2$$

$$\pm \sqrt{\frac{\beta_p}{\beta_n}} [-V_{DD} + |V_{TP}|] = a$$

otteniamo:

$$-\frac{2C_L}{\beta_n} \int_{V_{DD} - V_{OLmax} - V_{TN}}^{V_{DD} - |V_{TP}| - V_{TN}} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_1} dt$$

Ricordando che:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

otteniamo:

$$[t]_{t_0}^{t_0 + \Delta t_1} = -\frac{2C_L}{\beta_n} \left[ \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right]_{V_{DD} - V_{OLmax} - V_{TN}}^{V_{DD} - |V_{TP}| - V_{TN}}$$

$$\Delta t_1 = -\frac{2C_L}{\beta_n} \frac{1}{a} \left[ \arctan \frac{V_{DD} - |V_{TP}| - V_{TN}}{a} - \arctan \frac{V_{DD} - V_{OLmax} - V_{TN}}{a} \right]$$

in cui occorre prendere il segno  $\pm$  in modo opportuno affinché risulti  $\Delta t_1$  fisicamente accettabile.

### 1.3 Calcolo di $\Delta t_2$ integrando fra $|V_{TP}|$ e $V_{DD} - V_{TN}$

La corrente di carica è data dalla somma della corrente fornita da  $M_N$ , operante in regione di saturazione, e  $M_P$  in triodo. Per calcolare  $\Delta t_2$  occorre risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} I_{C_L} = C_L \frac{dV_O}{dt} \\ I_{C_L} = I_{M_N SAT} + I_{M_P TRI} \end{cases}$$

che è equivalente all'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} C_L \frac{dV_O}{dt} &= I_{M_N SAT} + I_{M_P TRI} \\ &= \frac{\beta_n}{2} [V_{DD} - V_O - V_{TN}]^2 + \\ &\quad + \frac{\beta_p}{2} [2(0 - V_{DD} - V_{TP})(V_O - V_{DD}) - (V_O - V_{DD})^2] \end{aligned}$$

Separando le variabili:

$$\frac{C_L}{\frac{\beta_n}{2} [V_{DD} - V_O - V_{TN}]^2 + \frac{1}{\frac{\beta_p}{2} [2(-V_{DD} + |V_{TP}|)(V_O - V_{DD}) - (V_O - V_{DD})^2]}} \cdots dV_O = dt$$

$$\frac{C_L}{\frac{\beta_n}{2} [V_{DD} - V_O - V_{TN}]^2 + \frac{1}{\beta_p(-V_{DD} + |V_{TP}|)(V_O - V_{DD}) - \frac{\beta_p}{2}(V_O - V_{DD})^2}} \cdots dV_O = dt$$

in cui integriamo fra  $|V_{TP}|$  e  $V_{DD} - V_{TN}$ :

$$\int_{|V_{TP}|}^{V_{DD}-V_{TN}} \frac{C_L}{\frac{\beta_n}{2} [V_{DD} - V_O - V_{TN}]^2 + \dots} \dots$$

$$\dots \frac{1}{\beta_p(-V_{DD} + |V_{TP}|)(V_O - V_{DD}) - \dots} \dots$$

$$\dots \frac{1}{\frac{\beta_p}{2}(V_O - V_{DD})^2} dV_O = \int_{t_0+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_1+\Delta t_2} dt$$

Effettuiamo un cambiamento di variabile ponendo:

$$V_O - V_{DD} = x$$

$$V_O = x - V_{DD}$$

da cui:

$$dV_O = dx$$

e sostituendo nell'integrale:

$$\int_{|V_{TP}|-V_{DD}}^{-V_{TN}} \frac{C_L}{\frac{\beta_n}{2}(-x - V_{TN})^2 + \beta_p(-V_{DD} + |V_{TP}|)x - \frac{\beta_p}{2}x^2} dx$$

$$\int_{|V_{TP}|-V_{DD}}^{-V_{TN}} \frac{C_L}{\frac{\beta_n}{2}(x^2 + V_{TN}^2 - 2V_{TN}x) + \beta_p(-V_{DD} + |V_{TP}|)x - \frac{\beta_p}{2}x^2} dx$$

$$\int_{|V_{TP}|-V_{DD}}^{-V_{TN}} \frac{C_L}{\left[\frac{\beta_n}{2} - \frac{\beta_p}{2}\right]x^2 + [\beta_p(-V_{DD} + |V_{TP}|) - \beta_n V_{TN}]x + \frac{\beta_n}{2}V_{TN}^2} dx$$

Inoltre posto:

$$a = \frac{\beta_n}{2} - \frac{\beta_p}{2}$$

$$b = \beta_p(-V_{DD} + |V_{TP}|) - \beta_n V_{TN}$$

$$c = \frac{\beta_n}{2} V_{TN}^2$$

otteniamo:

$$\int_{|V_{TP}|-V_{DD}}^{-V_{TN}} \frac{C_L}{ax^2 + bx + c} dx = \int_{t_0+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_1+\Delta t_2} dt$$

Ricordando che:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| & \text{se } b^2 - 4ac > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} & \text{se } b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

e definito  $\Delta = b^2 - 4ac$ , se  $\Delta > 0$  otteniamo:

$$[t]_{t_0+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_1+\Delta t_2} = \left[ \frac{C_L}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{\Delta}}{2ax + b + \sqrt{\Delta}} \right| \right]_{|V_{TP}| - V_{DD}}^{-V_{TN}}$$

$$\Delta t_2 = \frac{C_L}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{-2aV_{TN} + b - \sqrt{\Delta}}{-2aV_{TN} + b + \sqrt{\Delta}} \right| - \frac{C_L}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{2a(|V_{TP}| - V_{DD}) + b - \sqrt{\Delta}}{2a(|V_{TP}| - V_{DD}) + b + \sqrt{\Delta}} \right|$$

$$\Delta t_2 = \frac{C_L}{\sqrt{\Delta}} \left\{ \ln \left| \frac{-2aV_{TN} + b - \sqrt{\Delta}}{-2aV_{TN} + b + \sqrt{\Delta}} \right| - \ln \left| \frac{2a(|V_{TP}| - V_{DD}) + b - \sqrt{\Delta}}{2a(|V_{TP}| - V_{DD}) + b + \sqrt{\Delta}} \right| \right\}$$

$$\Delta t_2 = \frac{C_L}{\sqrt{\Delta}} \left\{ \ln \left| \frac{-2aV_{TN} + b - \sqrt{\Delta}}{-2aV_{TN} + b + \sqrt{\Delta}} \frac{2a(|V_{TP}| - V_{DD}) + b + \sqrt{\Delta}}{2a(|V_{TP}| - V_{DD}) + b - \sqrt{\Delta}} \right| \right\}$$

Se  $\Delta < 0$  otteniamo:

$$[t]_{t_0+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_1+\Delta t_2} = \left[ \frac{C_L}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} \right]_{|V_{TP}| - V_{DD}}^{-V_{TN}}$$

$$\Delta t_2 = \frac{C_L}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \frac{-2aV_{TN} + b}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{C_L}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \frac{2a(|V_{TP}| - V_{DD}) + b}{\sqrt{-\Delta}}$$

$$\Delta t_2 = \frac{C_L}{\sqrt{-\Delta}} \left\{ \arctan \frac{-2aV_{TN} + b}{\sqrt{-\Delta}} - \arctan \frac{2a(|V_{TP}| - V_{DD}) + b}{\sqrt{-\Delta}} \right\}$$

### 1.4 Calcolo di $\Delta t_3$ integrando fra $V_{DD} - V_{TN}$ e $V_{DD}$

La corrente di carica è data da quella di  $M_P$  che lavora in regione di triodo. Per calcolare  $\Delta t_2$  occorre risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} I_{CL} = C_L \frac{dV_O}{dt} \\ I_{CL} = I_{M_P TRI} \end{cases}$$

che è equivalente all'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} C_L \frac{dV_O}{dt} &= I_{M_P TRI} \\ &= \frac{\beta_p}{2} [2(0 - V_{DD} - V_{TP})(V_O - V_{DD}) - (V_O - V_{DD})^2] \end{aligned}$$

Separando le variabili:

$$\frac{C_L}{\frac{\beta_p}{2} [2(V_{DD} + |V_{TP}|)(V_O - V_{DD}) - (V_O - V_{DD})^2]} dV_O = dt$$

in cui integriamo fra  $V_{DD} - V_{TN}$  fino ad un generico  $V_{OH_{min}}$  a cui corrisponde l'istante finale  $t_f = t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$ :

$$\int_{V_{DD}-V_{TN}}^{V_{OH_{min}}} \frac{\frac{2C_L}{\beta_p}}{2(-V_{DD} + |V_{TP}|)(V_O - V_{DD}) - (V_O - V_{DD})^2} dV_O = \int_{t_0+\Delta t_1+\Delta t_2}^{t_0+\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3} dt$$

Effettuiamo un cambiamento di variabile ponendo:

$$\begin{aligned} V_O - V_{DD} &= x \\ V_O &= x - V_{DD} \end{aligned}$$

da cui:

$$dV_O = dx$$

Inoltre posto:

$$\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= (-V_{DD} + |V_{TP}|) \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\int_{-V_{TN}}^{V_{OH_{min}} - V_{DD}} \frac{\frac{2C_L}{\beta_p}}{2bx - x^2} dx = \int_{t_0+\Delta t_1+\Delta t_2}^{t_0+\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3} dt$$

Ricordando che:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx} dx = \frac{1}{\pm b} \ln \left| \frac{2ax + b - (\pm b)}{2ax + b + (\pm b)} \right|$$

otteniamo:

$$[t]_{t_0+\Delta t_1+\Delta t_2}^{t_0+\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3} = \left[ \frac{\frac{2C_L}{\beta_p}}{\pm b} \ln \left| \frac{2ax + b - (\pm b)}{2ax + b + (\pm b)} \right| \right]_{-V_{TN}}^{V_{OH_{min}} - V_{DD}}$$

$$\Delta t_3 = \frac{\frac{2C_L}{\beta_p}}{\pm b} \ln \left| \frac{2a(V_{OH_{min}} - V_{DD}) + b - (\pm b)}{2a(V_{OH_{min}} - V_{DD}) + b + (\pm b)} \right| - \frac{\frac{2C_L}{\beta_p}}{\pm b} \ln \left| \frac{-2aV_{TN} + b - (\pm b)}{-2aV_{TN} + b + (\pm b)} \right|$$

$$\Delta t_3 = \frac{\frac{2C_L}{\beta_p}}{\pm b} \left\{ \ln \left| \frac{2a(V_{OH_{min}} - V_{DD}) + b - (\pm b)}{2a(V_{OH_{min}} - V_{DD}) + b + (\pm b)} \right| - \ln \left| \frac{-2aV_{TN} + b - (\pm b)}{-2aV_{TN} + b + (\pm b)} \right| \right\}$$

$$\Delta t_3 = \frac{\frac{2C_L}{\beta_p}}{\pm b} \left\{ \ln \left| \frac{2a(V_{OH_{min}} - V_{DD}) + b - (\pm b)}{2a(V_{OH_{min}} - V_{DD}) + b + (\pm b)} \right| - \ln \left| \frac{-2aV_{TN} + b + (\pm b)}{-2aV_{TN} + b - (\pm b)} \right| \right\}$$

in cui occorre prendere il segno  $\pm$  in modo opportuno affinché risulti  $\Delta t_3$  fisicamente accettabile.

In maniera del tutto analoga si può calcolare il tempo di scarica del transfert gate cMOS.

## 2 Transfert gate nMOS con effetto body

Il circuito in figura fig. 3 carica il condensatore  $C_L$  attraverso un transfert gate nMOS in cui consideriamo anche l'effetto Body. L'effetto Body altera la tensione di soglia  $V_{TN}$  in funzione della tensione  $V_{SBN}$  fra source e bulk secondo l'espressione:

$$V_{TN} = V_{T_0} + \gamma \left( \sqrt{2\Phi_F + V_{SBN}} - \sqrt{2\Phi_F} \right)$$

La tensione di uscita  $V_O$  si carica ad un valore massimo raggiunto il quale il  $M_N$  si spegne. Durante la carica il  $M_N$  è acceso, ossia:

$$M_N \text{ ON} \Leftrightarrow V_{GSN} \geq V_{TN}$$

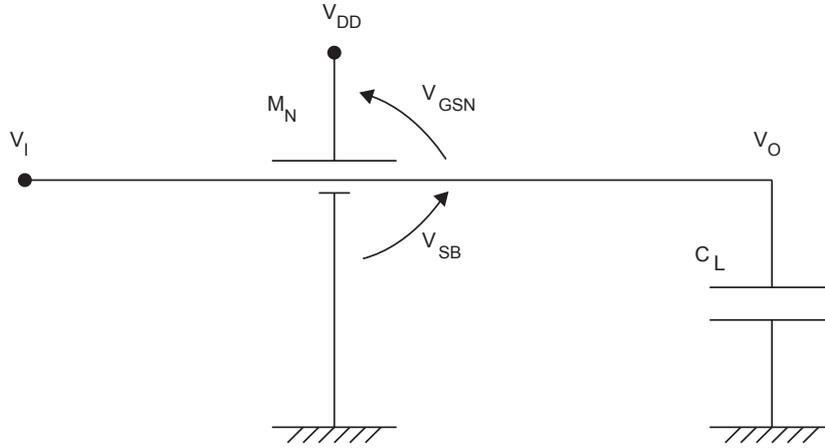


Figura 3: Transfert gate nMOS

Pertanto:

$$\begin{aligned}
 V_{DD} - V_O &\geq V_{T_0} + \gamma \left( \sqrt{2\Phi_F + V_O} - \sqrt{2\Phi_F} \right) \\
 V_{DD} - V_O &\geq V_{T_0} + \gamma\sqrt{2\Phi_F + V_O} - \gamma\sqrt{2\Phi_F} \\
 (V_{DD} - V_{T_0} + \gamma\sqrt{2\Phi_F}) - V_O &\geq \gamma\sqrt{2\Phi_F + V_O}
 \end{aligned}$$

che andiamo a risolvere rispetto a  $V_O$ :

$$(V_{DD} - V_{T_0} + \gamma\sqrt{2\Phi_F})^2 + V_O^2 - 2V_O(V_{DD} - V_{T_0} + \gamma\sqrt{2\Phi_F}) \geq \gamma^2(2\Phi_F + V_O)$$

$$\begin{aligned}
 V_O^2 + \left( -2(V_{DD} - V_{T_0} + \gamma\sqrt{2\Phi_F}) - \gamma^2 \right) V_O - \\
 2\gamma^2\Phi_F + (V_{DD} - V_{T_0} + \gamma\sqrt{2\Phi_F})^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

In cui posto:

$$\begin{aligned}
 a &= 1 \\
 b &= -2(V_{DD} - V_{T_0} + \gamma\sqrt{2\Phi_F}) - \gamma^2 \\
 c &= 2\gamma^2\Phi_F + (V_{DD} - V_{T_0} + \gamma\sqrt{2\Phi_F})^2
 \end{aligned}$$

otteniamo:

$$V_{O_{1,2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

L'intervallo aperto  $]V_{O_1}, V_{O_2}[$  rappresenta l'insieme di possibili soluzioni che verificano l'ipotesi  $M_N ON$ . Poiché stiamo analizzando la fase di carica il condensatore  $C_L$  è inizialmente scarico.  $V_O$ , inizialmente nulla, comincia a crescere fino a raggiungere l'unica soluzione fisicamente accettabile  $V_{O_1}$ . Nel caso  $V_I = V_{DD}$  otteniamo come risultato un valore di  $V_O$  che è ben diverso dalla classica  $V_{DD}$  meno una soglia.